HF Formelsammlung

Thomas Ruschival

7. März 2006

1 ED-Grundlagen

Felder:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad \vec{H}(t,\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Elektrostatischer Fluss:
Allgemein:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

Lineare Medien:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Polatisation:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \qquad \chi = \epsilon_r - 1$$

Magnetisierung:

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H} \qquad \chi_m = \mu_r - 1$$

Leiterstromdichte:

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

Verschiebungsstromdichte:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Ladung:

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \iiint \mathbf{div} \vec{D} dV = \iiint \rho dV = Q$$

Polarisationsladung:

$$\rho_p = -\mathbf{div} \vec{P} \qquad \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

fiktive Magnetisierungsladungen:

$$\rho_m = -\mathbf{div} \vec{m} \qquad \sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n}$$

Magnetisierungsstromdichten:

$$\vec{J}_{mag} = \frac{\mathbf{rot} \vec{M}}{\mu_0} \qquad k_{mag} = \frac{\vec{M}}{\mu_0} \times \vec{n}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\mathbf{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Quellenfreiheit:

$$\mathbf{rot} \vec{E} = 0 \Longleftrightarrow \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$

$$\mathbf{div} \vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \iint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

1.1 Durchflutungsgesetz:

$$\underbrace{\oint \vec{H}\,d\vec{s}}_{Durchflutung} = \iint \vec{J}\,d\vec{A} = \int\int(\underbrace{\kappa}_{L.Stromdichte} + \underbrace{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}_{V.Stromdichte})\vec{E}d\vec{A} = I_{gesamt}$$

$$\mathbf{rot}\vec{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}H_z - \frac{\partial}{\partial z}H_y \\ \frac{\partial}{\partial z}H_x - \frac{\partial}{\partial x}H_z \\ \frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\partial}{\partial y}H_x \end{pmatrix} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\kappa + j\omega\epsilon_0\epsilon_r)\vec{E}$$

1.2 Induktionsgesetz:

$$\underbrace{\iint \vec{B}\,d\vec{A}}_{magnetischerFluss} = L \cdot I = \Phi$$

$$\mathbf{rot}\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y \\ \frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z \\ \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x \end{pmatrix} = -\mu_0\mu r\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu_0\mu r\vec{H} \Longleftrightarrow -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{A} = \oint \vec{E}d\vec{s}$$

1.3 Differenzialgleichungen und Randbedingungen

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \triangle A = -\mu_0\vec{J}$$

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$A_1 = A_2$$

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = \sigma$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = k_{frei}$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \qquad \vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$$

$$\epsilon_0\epsilon_{r1}\vec{E}_{1n} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}_{2n}$$

$$\mu_0\mu_{r1}\vec{H}_{1n} = \mu_0\mu_{r2}\vec{H}_{2n}$$

$$\left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1\right) \cdot \vec{n} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

1.4 Wellengleichung

Annahme:

$$\vec{E} = E_y(z)e^{j(\omega t - kr)} \quad \Rightarrow H_y, H_z \stackrel{!}{=} 0$$

Aus Durchflutungsgesetz:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega\epsilon E_y \tag{1}$$

Aus Induktionsgesetz:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \tag{2}$$

(2) nach z ableiten:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = j\omega\mu\frac{H_x}{\partial z} \;\Rightarrow\quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \tag{3}$$

(3) in (1):

$$\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - j\omega\epsilon E_y = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \underbrace{\omega^2\epsilon\mu}_{\beta_0^2} E_y = 0 \tag{4}$$

Annahme:

$$E_y = Ee^{\gamma z} \Rightarrow \gamma^2 = -\beta_0^2 \Rightarrow \gamma = \pm j\beta \tag{5}$$

Allgemeine Lösung:

$$E_y(z) = E_h e^{-j\beta_0 z} + E_r e^{+j\beta_0 z} \tag{6}$$

1.4.1 Wellenkenngrößen

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{p0} = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

Phasenkonstante:

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\beta_0}{c_0} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

Feldwellenwiederstand:

$$\frac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{H}\right|} = Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{c_0\epsilon_0} = c_0\mu_0 = \frac{\beta_0}{\omega\epsilon_0} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_0}$$

1.5 Leistung

$$P = \frac{1}{2}\Re\{U \cdot I^*\} = \frac{1}{2}\Re\left\{(U_h + U_r) \cdot \frac{(U_h - U_r)}{Z_L}\right\}$$

$$P = \frac{|U_h|^2 - |U_r|^2}{2Z_L} = \frac{|U_h|^2}{2Z_L} \cdot \left(1 - |r_2|^2\right)$$

Streifenleitung:

$$P = \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{E_y}b \cdot \vec{H_{-x}}a\right\} \qquad \frac{P}{ab} = s = \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{E} \cdot \vec{H}\right\} \quad \text{s=em Wirkleistungsdichte}$$

Wellen:

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{E} \times \vec{H^*}\right\} \qquad |\vec{s}| = \frac{1}{2Z_{F0}}\Re\left\{\vec{E} \cdot \vec{E^*}\right\} = \frac{1}{2Z_{F0}}|\vec{E}|^2$$

2 Leitungen

Beläge:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -j\omega L' I \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -j\omega C' U$$

$$L' = \frac{Z_L}{v_p} \quad C' = \frac{1}{Z_L v_p} \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad Z_L = \frac{L'}{C'}$$

2.1 verlustlose fehlangepasste Leitung

$$U(z) = U_h e^{-j\beta z} + U_r e^{+j\beta z} \qquad I(z) = \frac{U_h}{Z_L} e^{-j\beta z} - \frac{U_{hr}}{Z_L} e^{j\beta z}$$

2.1.1 Reflexionsfaktor:

$$r(z) = \frac{U_h e^{-j\beta z}}{U_r e^{j\beta z}}$$

$$r_2 = r|_{z=0} = \frac{U_h}{U_r} \quad r_2 = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} = \frac{\frac{Z_2}{Z_L} - 1}{\frac{Z_2}{Z_L} + 1}$$

$$r_1 = r|_{z=-l} = \frac{U_h e^{-j\beta l}}{U_r e^{j\beta l}} = \underbrace{\frac{U_h}{U_r}}_{r_2} e^{-j2\beta l}$$

Transmission:

$$t_{12} = 1 + r$$

2.2 Impedanztransformation

$$U_1 = U_2 \left(cos(\beta l) + j \frac{Z_L}{Z_2} sin(\beta l) \right)$$

$$I_1 = I_2 \left(cos(\beta l) + j \frac{Z_2}{Z_L} sin(\beta l) \right)$$

$$Z_1 = Z_L \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_2} tan(\beta l)}{1 + j \frac{Z_2}{Z_L} tan(\beta l)}$$

Impedanzinverter:

$$Z_1 = \frac{Z_L^2}{Z_2}$$

2.3 gedämpfte Leitung

Einführung von Komplexem $\underline{\mu}$, $\underline{\epsilon}$:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega \underbrace{C' \frac{a}{b}\left(1 + \frac{G'}{j\omega C'}\right)}_{\underline{\epsilon}} \underbrace{\frac{U}{b}}_{E_y} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega \underbrace{L' \frac{a}{b}\left(1 + \frac{R'}{j\omega L'}\right)}_{\underline{\mu}} H_x$$

$$\underline{\mu} = |\mu| e^{-j\delta_\mu} \qquad \underline{\epsilon} = |\epsilon| e^{-j\delta_\epsilon}$$

Dämpfung α:

$$\alpha = \frac{R'}{2Z_L} + \frac{G'}{2Y_L} \quad in \left[\frac{Np}{m}\right] \quad Y_L = \frac{1}{Z_L}$$

$$\left[\frac{Np}{m}\right] = 8,6 \left[\frac{dB}{m}\right]$$

$$U(z) = U_h e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + U_r e^{\alpha z} e^{+j\beta z} \qquad I(z) = \frac{U_h e^{-\alpha z}}{Z_L} e^{-j\beta z} - \frac{U_{hr} e^{\alpha z}}{Z_L} e^{j\beta z}$$

2.3.1 Reflexionsfaktor

$$r(z) = \frac{U_h e^{\alpha z} e^{-j\beta z}}{U_r e^{-\alpha z} e^{j\beta z}} \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 e^{-2\alpha l} e^{-2\beta l}$$

3 Skineffekt

Eindringtiefe δ:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu_r \kappa}} \qquad \delta_{Cu} \approx \frac{66}{\sqrt{\frac{f}{MHz}}} \qquad J_L(y) = J(0) e^{\frac{y}{\delta}} e^{j\frac{y}{\delta}}$$

Impedanz:

$$Z = Z_\square(\underbrace{1}_{R'} + \underbrace{j}_{X'})$$

Belag:

$$Z' = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{c}} \frac{b}{a}$$

Oberflächenimpedanz:

$$R_\square = X_\square = \underbrace{\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}}_{\frac{1}{\delta\kappa}} \sim \sqrt{f \frac{\mu_r}{\kappa}} \quad Z_\square = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\kappa}} \quad Zylinder: Z_\square \frac{l}{d\pi} \quad Streifen: Z_\square \frac{\triangle l}{a}$$

Koaxialleitung:

$$Z_{koax} = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,eff}}} ln\left(\frac{D}{d}\right) \qquad R' = \frac{1}{\pi\delta\kappa}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right)$$

4 Konzentrierte Elemente:

4.1 Induktivitäten

kurzgeschlossene Leitung, $\beta l \ll 1 \quad X_1 = \omega L' l$
Verlustbehaftete Spule:

$$\underline{Z} = j\omega \underline{L} = j\omega \frac{n^2}{\underline{R_m}} = j\omega n^2 \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} = \frac{j\omega n^2 A \mu_0 (\mu_r' - j\mu_r'')}{l} = j\omega L + \omega L \underbrace{\frac{\mu_r''}{\mu_r'}}_{tan(\delta_\mu)}$$

Verlustfaktor:

$$tan(\delta_\mu) = \frac{\mu_r''}{\mu_r'} \quad \underline{\mu_r} = \underbrace{\mu_r'}_{\mu_0 \mu_r}(1 - tan\delta_\mu)$$

Verluste im Ferrit:

$$R_{Fe} = \omega L tan(\delta_\mu) \qquad \mu_r = |\mu_r| e^{-j\delta_\mu} \qquad tan\delta_{\mu,eff} = \frac{R_{Fe}}{\omega L}$$

Güte:

$$Q_L = \frac{X}{R} = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{P_B}{P} = \frac{1}{tan\delta_L} \quad R_s = R_{Cu} + R_{Fe}$$

Näherung für $R_{Cu} \to 0 : tan\delta_L = tan\delta_\mu$

Umrechnung in Parallelschaltung: $Q_L \gg 10 \to R_p = \frac{X_L^2}{R_s}$

4.2 Kapazitäten

offene verlustlose Leitung $\beta l \ll 1 \quad B_1 = \omega C' l$
Verlustfaktor:

$$tan\delta_\epsilon = \frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r''} = \frac{G_p}{\omega C} \qquad \underline{\epsilon} = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$$

Umrechung in Seriellschaltung: $tan\delta_C \ll 0,1 : R_s = \underbrace{\frac{1}{\omega C}^2}_{X_C^2} \frac{1}{R_p}$

5 Resonanzschaltungen

5.1 konzentrierte Elemente und allgemeines

Resonanzblindwiderstand/-leitwert:

$$X_R = \frac{1}{\omega_R C} = \omega_R L = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad B_R = \frac{1}{\omega_R L} = \omega_R C = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Kreisgüte:

$$Q_k = \frac{B_R}{G_k} = \frac{R_k}{X_R} = \frac{\omega_R w_{max}}{P}$$

Normierte verstimmung:

$$F = Q_k \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right) \Rightarrow \quad \underline{Y_k} = G_k(1 + jF) \quad \underline{Z_k} = R_k(1 + jF)$$

Bandbreite:

$$\frac{b_k}{f_r} = \frac{f_o - f_u}{f_r} = \frac{1}{Q_k}$$

Resonanzfrequenz:

$$f_r = \sqrt{f_o f_u}$$

Schmalbandnäherungen gültig für $f \approx f_r$

$$F \approx Q_k \frac{2 \triangle f}{f_r} = \frac{2 \triangle f}{b_k} \qquad f_{o,u} \approx f_r \pm \frac{b_k}{2}$$

Kompensation:

$$\sqrt{\frac{X_R}{B_R}} = R_i \qquad \frac{P}{P_{max}} = \left(\frac{U}{U_{max}}\right)^2 = \frac{1}{1+F^2}$$

5.2 Leitungsresonatoren

$$Z_1 = jZ_L tan(2\pi \frac{l}{v_P} f) = jX(f) \qquad Y_1 = -jZ_L cot(2\pi \frac{l}{v_P} f) = jX(f) = -jB(f)$$

Resonanzleitwert/-widerstand:

$$B_R = \frac{\pi}{4Z_L} \qquad X_R = \frac{\pi}{4}\left(Z_{L1} - \frac{Z_{L1}^3}{R_a}\right)$$

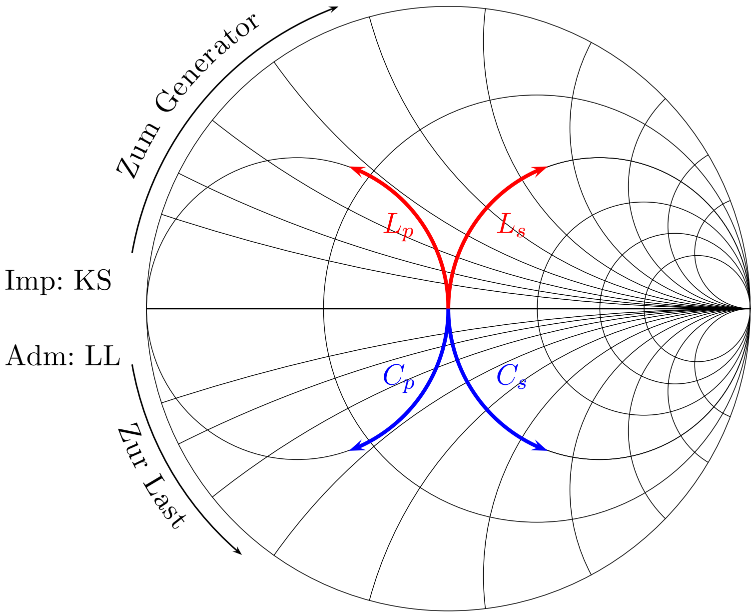
Parallelresonanz:

$$l = \frac{\lambda_r}{4} \quad G_v = \frac{\lambda_r}{8} Y_L^2 \underbrace{R'}_{Leitungsbelag}$$

Güte:

$$Q_u = \frac{B_r}{G_v} = \frac{\pi}{\alpha \lambda_r} \sim \sqrt{f_r} \qquad Q_k = \frac{B_r}{G_k}$$

6 Smith Diagram



Bauteilwerte:

$$C_p = \frac{\Delta B}{\omega Z_L} \qquad L_p = \frac{-Z_L}{\omega \Delta B}$$

$$C_s = -\frac{1}{\omega Z_L \Delta X} \qquad L_s = \frac{\Delta X Z_L}{\omega}$$

6.1 Bauelemente durch Leitung ersetzen:

1. Ltg kurzgeschlossen: vom KS-Punkt in Richtung Generator (Last ist hier der KS) bis du dem Punkt auf dem äusseren Kreis des Diagrams der das Bauelement darstellt.

2. Ltg offen: vom LL-Punkt in Richtung Generator (Last ist hier der LL) bis du dem Punkt auf dem äusseren Kreis des Diagrams der das Bauelement darstellt

! ACHTUNG ! Leitung transformiert auf Kreis mit konstantem Reflexionsfaktor !

7 Filter

7.1 Butterworth

7.1.1 Filterkoeffizienten

$$g_i = 2sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

Ordnung / g_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2.0000	1.4142	1.0000	0.7654	0.6180	0.5176	0.4450	0.3902	0.3473
2		1.4142	2.0000	1.8478	1.6180	1.4142	1.2470	1.1111	1.0000
3			1.0000	1.8478	2.0000	1.9319	1.8019	1.6629	1.5321
4				0.7654	1.6180	1.9319	2.0000	1.9616	1.8794
5					0.6180	1.4142	1.8019	1.9616	2.0000
6						0.5176	1.2470	1.6629	1.8794
7							0.4450	1.1111	1.5321
8								0.3902	1.0000
9									0.3473